-. Material adicional:

-. Relación entre continuidad puntual y sucesiones

Prop 21: Sea $f: A \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ y $x_0 \in A$.

Son equivalentes:

i) $f(x)$ es continua en $x = x_0$

ii) Dada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesión en A con $x_n \mapsto x_0$, entonces $f(x_n) \mapsto f(x_0)$.

Dem: Sabemos (Prop 5.IV Notas de Clase), que si $\exists \lim_{x \mapsto x_0} f(x) = l$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ a una sucesión en A con $x_n \mapsto x_0$, ~~...~~ $\lim_{n \mapsto \infty} f(x_n) = l$. Si además $f(x)$ está definida en $x = x_0$, podemos tomar cualquier sucesión en A con $x_n \mapsto x_0$. En tal caso, f continua en $x_0 \Leftrightarrow l = f(x_0)$, de dónde $i) \Rightarrow ii)$

· Veamos $ii) \Rightarrow i)$: Si supusiéramos que se cumple ii) pero no i), fijamos $\delta_0 > 0$ tal que

f está definida en $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0) \subset A$.

Tomemos $\delta_k = \frac{\delta_0}{k}$ $(k=1,2,\dots)$ y entonces,

con $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ tal que

ninguno de estos δ_k's funcionan en la definición de continuidad en $x = x_0$, esto es, hay algún x_k con $|x_k - x_0| < \frac{\delta_0}{k}$ y sin embargo $|f(x_k) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$ $\forall k = 1,2,\dots$,

Pero como $|x_k - x_0| < \frac{\delta_0}{k}$ $\forall k \Rightarrow x_k \mapsto x_0$, luego $f(x_k) \mapsto f(x_0)$. En particular, $\exists K$ tal que $k \geq K \Rightarrow |f(x_k) - f(x_0)| < \varepsilon_0$ (contradicción) $\boxed{}$

Observación: Como criterio para determinar límites Prop 21 (ii) es poco práctico, pues casi siempre pasa por establecer primero la continuidad de f en x_0. Hacerlo directamente con la definición suele ser bastante difícil (de ahí precisamente toda la teoría de este capítulo, que permite abordar esta cuestión mediante los teoremas estudiados

-. Paridad de funciones.

Def 10 (Funciones pares e impares).

Sea $f: A \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, donde $A \subset \mathbb{R}$ es un subconjunto par (es decir, $x \in A \Leftrightarrow -x \in A$). Decimos

i) f es par si $\forall x \in A$, $f(x) = f(-x)$.

ii) f es impar si $\forall x \in A$, $f(x) = -f(-x)$.

Prop 22: Sea $A \subset \mathbb{R}$ subconjunto par y $f, g : A \longmapsto \mathbb{R}$. Entonces:

i) Si f, g son ambas pares o impares y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ es asimismo par (respectivamente, impar).

ii) Si f, g son ambas pares o ambas impares, fg es par

iii) Si una de estas funciones es par y la otra impar fg es impar

iv) Si ~~$f:A$~~ $B \subset \mathbb{R}$ es subconjunto par $g : B \longmapsto \mathbb{R}$ es par e $\mathrm{Im}(f) \subset B$, entonces $g \circ f : A \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ es par, si f es o bien par o bien impar.

v) Si $g : B \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ (con B subconjunto par) es impar e $\operatorname{Im}(f) \subset B$ con f par, entonces $g \circ f : A \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ es par.

vi) Si $g : B \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ (con B subconjunto par) es impar e $\operatorname{Im}(f) \subset B$ con f impar, entonces $g \circ f : A \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ es impar.

Dem: i), ii), iii) : Inmediatas (ejercicio).

iv) Sea $x \in A$. $(g \circ f)(-x) = g(\underbrace{f(-x)}_{=\pm f(x)})$ (f par o impar)

$= g(\pm f(x))$ (por ser g par)

$= g(f(x))$

$= (g \circ f)(x)$.

v) Sea $x \in A$: $(g \circ f)(-x) = g(f(-x))$

$= g(f(x))$ (f par)

$= (g \circ f)(x)$

vi) Sea $x \in A$: $(g \circ f)(-x) = g(f(-x))$

$= g(-f(x))$ (f impar)

$= -g(f(x))$ (g par)

$= -(g \circ f)(x)$